

# ПОНЯТИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Малькова Я.Ю., Фатеева Ю.В., Долотова Р.Г.

Томский политехнический университет  
dolot63@mail.ru, yamalkova96@gmail.com

## Введение

Еще несколько веков назад люди считали, что геометрия в природе ограничивается такими простыми объектами, как линия, круг, многоугольник, а также их комбинациями. Однако нередко те процессы, что происходят в природе, интригуют нас многократным повторением одного и того же узора, увеличенного или уменьшенного во сколько угодно раз. Например, у дерева есть ветви. На этих ветвях есть ветви поменьше и т.д. Теоретически, элемент «разветвление» повторяется бесконечно много раз, становясь все меньше и меньше. Разветвления трахейных трубочек, листья на деревьях, вены на руке, реки, бурлящие и изгибающиеся, рынок ценных бумаг – это все фракталы. На протяжении многих веков ученые, математики и артисты, как впрочем, и все остальные жители нашей планеты, были зачарованы фракталами и применяли их в своей работе. С появлением компьютеров небольшим набором формул можно сгенерировать фракталы бесконечной сложности и красоты на обычных стационарных компьютерах. В основе этого явления лежит предельно простая идея – копирования и масштабирования [1].

## Понятие фракталов. Историческая справка

Появление фрактальной геометрии как таковой следует отнести к началу 19 века. И связано оно с именем известного немецкого математика Георга Кантора. При помощи простой повторяющейся процедуры линия была превращена в набор несвязных точек именуемая Пылью Кантора. Суть метода заключалась в том, что ученый удалял центральную треть линии, после чего повторял то же самое с оставшимися отрезками (Рис. 1).



Рис. 1. Фрактальная геометрия Георга Кантара

В развитие фрактальной геометрии внес вклад итальянский математик Джузеппе Пеано. При создании линии Пеано пользовался следующим алгоритмом. Прямую линию заменял на 9 равных отрезков, длина которых была в три раза меньше, чем исходная линия. Далее он проделывал ту же самую операцию с каждым из получившихся отрезков. Линия заполняет всю плоскость. Позже было доказано, что абсолютно для каждой точки плоскости можно найти точку, принадлежащую линии Пеано (Рис. 2).

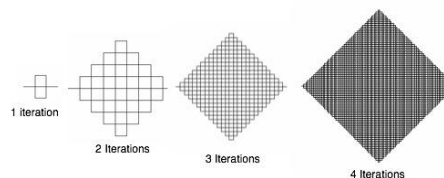


Рис. 2. Линии Пеано

Кривая Пеано и пыль Кантора далеко выходили за рамки обычных геометрических объектов и фигур, так как не могли иметь четкой однозначной размерности. Пыль Кантора была построена на одной прямой, но состояла из бесчисленного количества точек, кривая Пеано также строилась на основании линии, но в результате построений получалась плоскость. Также и во многих других областях науки появлялось немалое количество задач, решение которых приводило к странным результатам, например, цены на акции, Броуновское движение.

До начала 20 века шло лишь накопление данных об этих странных объектах, и еще не было предпринято попыток их систематизации. Французский математик Бенуа Мандельброт, слово «фрактал» вывел из латинского языка (fractus – разбитый, поделенный на части). И одно из определений фрактала звучит следующим образом – это геометрическая фигура, состоящая из частей и которая может быть поделена на части, каждая из которых будет представлять собой уменьшенную копию целого. С открытием понятия фрактала стало совершенно очевидным, что мы повсеместно окружены ими [2].

## Свойства фракталов

Первое свойство объектов фрактальной геометрии – *нерегулярность*. Нерегулярность фрактала с точки зрения математики будет означать следующее – данная функция не дифференцируемая, то есть не гладкая ни в какой точке на всем своем протяжении. Немало важным свойством является *самоподобие* фракталов. Самоподобие означает, что каждая, отдельно взятая часть фрактала, повторяет в своем развитии, развитие всего фрактала в целом и воспроизводится в различном масштабировании без видимых изменений. Стоит отметить, что фрактал имеет особо тонкую *структуру*, то есть в своем строении содержит предельно малые масштабы. Каждый фрактал имеют свою *размерность*. При анализе чередования участков с различной топологической размерностью и изучении воздействия на систему факторов

различного рода, определяется поведение системы как целого [3].

## Классификация фракталов

### Геометрические фракталы

Фракталы данного класса – самые наглядные, в них видна самоподобность объектов фрактальной геометрии. Для построения геометрических фракталов характерно задание «основы» и «фрагмента», повторяющегося при каждом уменьшении масштаба. Одним из самых наглядных примеров данного класса является Н-фрактал, который строится из горизонтального отрезка, имеющего единичную длину. На первой стадии два более коротких отрезка помещают перпендикулярно концам первоначального (Рис. 3, а). В 1904 году математик Кох привел пример кривой, которая нигде не имеет касательной. Построение кривой Коха начинаем с отрезка-основы: удаляем его среднюю третью часть и заменяем ее сторонами равностороннего треугольника. Кривую Коха можно строить на сторонах правильного многоугольника (Рис. 3, б). На рисунке 3 представлены геометрические фракталы: в – фрактал Малиновского; г – Кривая дракона; д – Звездный фрактал; е – Дерево Пифагора [2, 3].

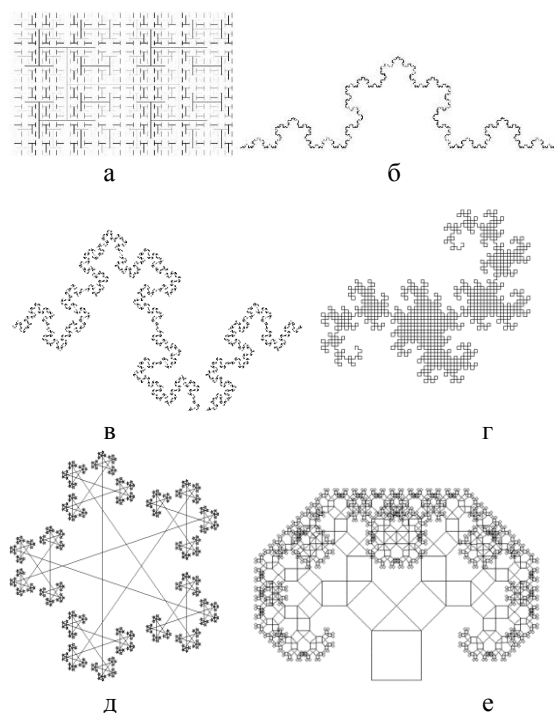


Рис. 3. Геометрические фракталы

### Динамические фракталы

Динамические или алгебраические фракталы строятся на основе алгебраических формул [4]. Существует множество методов получения алгебраических фракталов. Одним из самых известных является метод многократного расчета функции  $S_{n+1}=F(S_n)$ , где  $S$  – комплексное число,

а  $F$  – некоторая функция. Данную функцию вводят в компьютер. Расчеты закончатся, как только будет выполнено определенное условие. При выполнении условия на экран выводится точка [5]. На рисунке 4 представлены динамические фракталы: а – множество Мандельброта; б – множество Жюлиа; в – фрактал Галлея; г – фрактал Ньютона.

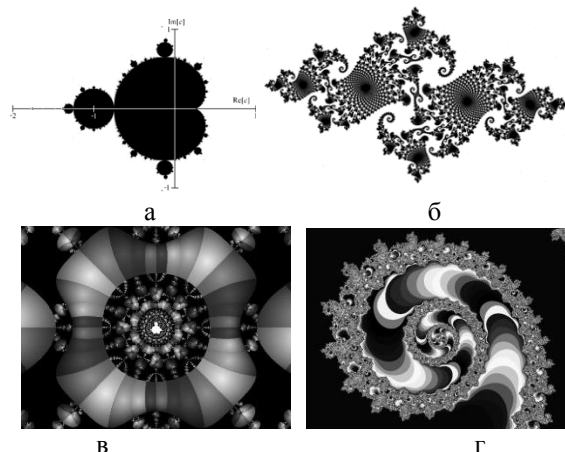


Рис. 4. Динамические фракталы

### Заключение

В реальной жизни объекты, обладающие фрактальной структурой, имеют вполне определенные границы фрактальности, в том числе и их главного свойства – самоподобия. Тем не менее, элементы фрактальной геометрии являются очень удобной и наглядной абстракцией, которая на сегодняшний день повсеместно вошла в нашу жизнь и довольно широко применяется при моделировании различного рода процессов. При этом ежедневно многократно увеличивается количество тех областей, в которых применяется фрактальная геометрия. Помимо той роли, которую играет фрактальное представление в описании сложных объектов природы, она также дает немалую популяризацию математического знания. Понятия фрактальной геометрии предельно просты и наглядны. Ее формы привлекают взгляд как с эстетической точки зрения, также они имеют и разнообразные приложения во многих сферах деятельности человека.

### Литература:

1. Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам. – М.: Мир, 1993
2. Понятие фрактала и история появления фрактальной графики [Электронный ресурс] URL: <http://life-prog.ru>
3. Свойства фракталов [Электронный ресурс] URL: <http://www.study-i.ru>
4. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. – М.: Наука, 1984
5. Морозов А.Д., и др. Инвариантные множества динамических систем в Windows. – М.: УПСС, 1998